

UDK 539.37:539.4.011:624.072.2:519.61

## PRIMJENA PLASTIČNIH ZGLOBOVA U ANALIZI OKVIRNIH KONSTRUKCIJA METODOM KONAČNIH ELEMENATA

### APPLICATION OF PLASTIC HINGES IN FINITE ELEMENT ANALYSIS OF FRAMED STRUCTURES

Branimir RONČEVIĆ – Goran TURKALJ

**Sažetak:** U ovom je članku izložena teorijska pozadina primjene metode plastičnih zglobova u analizi okvirnih konstrukcija, a sa svrhom ispitivanja njihove granične nosivosti. Metoda je izložena s naglaskom na pojavi materijalne nelinearnosti, a jednačbe koje i geometrijsku nelinearnost uzimaju u obzir dane su u gotovu obliku bez prethodnog izvoda. Materijal je pretpostavljen kao izotropan i linearno elastičan – idealno plastičan. Praktična primjena te metode prikazana je na više numerički riješenih primjera.

**Ključne riječi:**

- okvirna konstrukcija
- granična nosivost
- plastični zglob
- plastična redukcijska matrica
- funkcija tečenja

**Summary:** In this article a theoretical background of the plastic hinge method in the analysis of framed structures is presented with the aim of establishing their critical load. The method is presented with an emphasis on the effects of material nonlinearity, where equations that in addition consider geometric nonlinearity are given without the preceding derivation. Material is assumed to be isotropic and linearly elastic – perfectly plastic. Practical application of this method is presented through numerically solved examples.

**Key words:**

- framed structure
- critical load
- plastic hinge
- plastic reduction matrix
- yield surface

#### 1. UVOD

Elasto-plastična analiza igra vrlo važnu ulogu u optimalnom dizajnu konstrukcija u svim poljima inženjerstva. Analiza grednih i okvirnih konstrukcija važan je dio te problematike, osobito u građevinskim problemima te u strojogradnji i brodogradnji, gdje međusobno spojeni gredni čelični konstrukcijski elementi često čine nosivi dio konstrukcije.

Analiza se može provoditi razmatrajući samo elasto-plastično stanje poprečnih presjeka, tj. stanje u kojem po čitavu presjeku postoje točke koje su u stanju

#### 1. INTRODUCTION

Elastic-plastic analysis has a very important role in optimal design of structures in all fields of engineering. Analysis of beams and framed structures represents a significant part of that, especially in architectural problems, machine design and naval architecture, where interconnected steel beam members are quite commonly used as supporting parts of a structure.

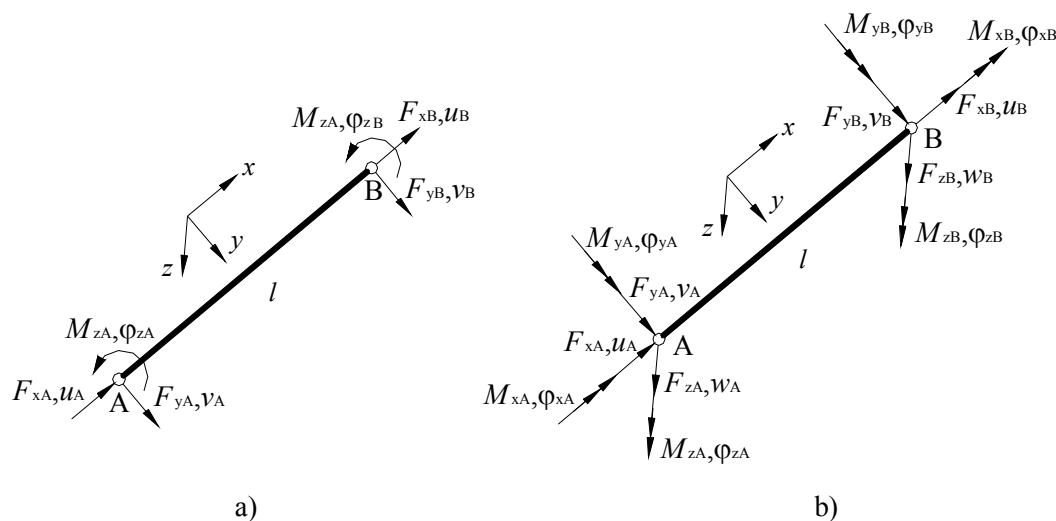
The analysis can be carried out considering only the elastic-plastic state of the cross sections, i.e. existence of points along a cross section which have undergone elastic strain

elastične deformacije i točke koje su u stanju plastične deformacije. Međutim, vrlo je čest zadatak izračunavanje granične nosivosti konstrukcije, a u takvu će stanju neki poprečni presjeci nužno biti potpuno plastificirani. Takav se potpuno plastificirani poprečni presjek naziva plastičnim zglobom, a formiranjem dovoljnog broja plastičnih zglobova konstrukcija gubi nosivost. Općenito, za  $n$  puta statički neodređenu konstrukciju potrebno je  $n+1$  plastičnih zglobova da se ona pretvori u kinematički mehanizam i izgubi nosivost.

Umjesto elasto-plastične, u praksi se nerijetko provodi i pojednostavljena, tzv. plastična analiza, koja ne uzima u obzir prijelazna elasto-plastična stanja [4]. To znači da je poprečni presjek ili u potpunosti elastično deformiran ili je potpuno plastificiran pa se pretvorio u plastični zglob. Upravo će takvo pojednostavljenje biti uzeto u daljnjim razmatranjima i izvodima zavisnosti čvornih pomaka i čvornih sila.

## 2. GREDNI KONAČNI ELEMENT

Gredni konačni element može biti ravninski i prostorni [1,2,6]. Čvorovi ravninskog imaju tri, a prostornog šest stupnjeva slobode gibanja, kao što je prikazano na slici 1. U obama slučajevima postoje samo krajnji čvorovi, A i B.



Slika 1. Gredni konačni elementi  
Figure 1. Beam finite elements

Vektori čvornih pomaka i čvornih sila za ravninski element na slici 1a jesu:

$$\{u^e\}^T = \{u_A \quad v_A \quad \varphi_{zA} \quad u_B \quad v_B \quad \varphi_{zB}\}, \quad (1.a)$$

and those which have undergone plastic strain. However, a very common task is to calculate the critical load of a structure, which implicitly includes full plastification of some cross sections on the structure. A fully plastified cross section is called a plastic hinge and the formation of a critical number of plastic hinges leads the system to failure, i.e. the inability to carry the applied load. Generally, for an  $n$  times statically indeterminate structure it takes  $n+1$  plastic hinges to transform it into a mechanism which then leads to structural failure.

Instead of elastic-plastic analysis, it is not uncommon to use a simplified, so-called plastic analysis, which does not consider the gradual development of plastic zones [4]. This means that a cross section can be either in a completely elastic state or fully plastified and, thus, becomes a plastic hinge. This simplification will be used in further considerations and derivations of equations giving relations between nodal displacements and nodal forces.

## 2. BEAM FINITE ELEMENT

A beam element can be a spatial beam and a plane beam [1,2,6]. The first has three and the latter six degrees of freedom at each node, as shown in Figure 1. In both cases only two nodes are required, A and B, one at each end.

$$\{f^e\}^T = \{F_{xA} \quad F_{yA} \quad M_{zA} \quad F_{xB} \quad F_{yB} \quad M_{zB}\}, \quad (1.b)$$

dok su za prostorni element, slika 1b, ti vektori:

whereas for a spatial element, Figure 1b, these vectors are:

$$\{u^e\}^T = \{u_A \quad v_A \quad w_A \quad \varphi_{xA} \quad \varphi_{yA} \quad \varphi_{zA} \quad u_B \quad v_B \quad w_B \quad \varphi_{xB} \quad \varphi_{yB} \quad \varphi_{zB}\}, \quad (2.a)$$

$$\{f^e\}^T = \{F_{xA} \quad F_{yA} \quad F_{zA} \quad M_{xA} \quad M_{yA} \quad M_{zA} \quad F_{xB} \quad F_{yB} \quad F_{zB} \quad M_{xB} \quad M_{yB} \quad M_{zB}\}. \quad (2.b)$$

Sve su komponente vektora u izrazima (1) i (2) definirane u odnosu na težište poprečnog presjeka pripadnog čvora grednog elementa [2].

Kako ravninski gredni element ima ukupno šest stupnjeva slobode gibanja, po tri u svakom čvoru, to će matrica krutosti biti dimenzija  $6 \times 6$ , a, analogno tome, za prostorni će gredni element matrica krutosti biti dimenzija  $12 \times 12$ .

Osnovna jednačnja konačnog elementa općenito ima sljedeći oblik:

All components of vectors in expressions (1) and (2) are defined with respect to the centroid of the cross section at the node to which they refer to [2].

Since a plane beam element has a total of six degrees of freedom, three at each node, the stiffness matrix dimension is  $6 \times 6$ , and, similarly, for a spatial beam element the stiffness matrix dimension is  $12 \times 12$ .

Generally, the element stiffness equation has the following form:

$$[k_T^e] \{u^e\} = \{f^e\}, \quad (3)$$

gdje je

in which

$$[k_T^e] = [k^e] + [k_G^e] \quad (4)$$

tangentna matrica krutosti, koja geometrijskom matricom krutosti  $[k_G^e]$  uzima u obzir i geometrijsku nelinearnost, isto daje tzv. rješenje drugog reda [3]. Ako se, pak, analiza može provoditi na nedeformiranoj geometriji, tj. deformacije su male, tada se izraz (4) svodi na

is the tangent stiffness matrix, which considers the effect of geometric nonlinearity with the geometric stiffness matrix  $[k_G^e]$  obtaining the so called 2nd-order solution [3]. If, however, the analysis can be done on the undeformed geometry, i.e. small deformations, equation (4) reduces to

$$[k_T^e] = [k^e] \quad (5)$$

te se tada dobiva tzv. rješenje prvog reda.

which gives the so called 1st-order solution.

### 3. METODA PLASTIČNIH ZGLOBOVA

Matrice krutosti dane izrazima (4) i (5) odnose se na konačni element u linearno elastičnom stanju. Materijalnu se nelinearnost u jednačnji konačnog elementa u obzir uzima plastičnom redukcijском matricom  $[k_{pl}^e]$  [4].

Dodatna su pojednostavljenja, uz već u uvodu spomenuta, potrebna za sam matematički izvod:

- nema zaostalih naprezanja
- svi su plastični efekti koncentrirani u plastičnim zglobovima nulte duljine
- plastični se zglobovi pojavljuju samo u čvorovima konačnog elementa, dok je u polju konačnog elementa materijal linearno elastičan
- materijal je linearno elastičan-idealno plastičan

Plastičnu je redukcijску matricu moguće pronaći uz uvjet

### 3. PLASTIC HINGE METHOD

The two stiffness matrices (4) and (5) are valid for a linear elastic state of a beam element. Material nonlinearity is taken into account in the element stiffness equation by introducing the plastic reduction matrix  $[k_{pl}^e]$  [4].

Additional simplifications, besides those presented in the introduction, are needed for mathematical analysis:

- there is no residual stress
- plastic zones are assumed to be concentrated in zero length plastic hinges
- plastic hinges can be located only at the nodes, and the material is linearly elastic inside the element's region
- material is linearly elastic-perfectly plastic

The plastic reduction matrix can be derived only if a

da postoji kontinuirana funkcija tečenja  $\Phi$ , koja mora zadovoljavati uvjet

$$\Phi = \Phi(\{f^e\}) = 1. \quad (6)$$

Funkcija tečenja, čiji oblik ovisi o obliku poprečnog presjeka, u jednadžbi objedinjuje omjere svih komponenti opterećenja sa svojim graničnim vrijednostima, kada bi svaka od njih sama djelovala na gredni konačni element, npr.  $p = P/P_{pl}$  za aksijalnu silu. To znači da je za određenu točku na plohi tečenja međusobni odnos svih komponenti opterećenja, koje su poprečni presjek dovele do potpune plastifikacije, jednoznačno određen.

Kada je  $\Phi < 1$  materijal je u elastičnom stanju,  $\Phi = 1$  daje punu plastifikaciju, a  $\Phi > 1$  nije dozvoljeno zbog pretpostavke o idealno plastičnom ponašanju materijala.

### 3.1. Plastična redukcijaska matrica

Pod pretpostavkom se beskonačno malih prirasta vektora deformacije taj vektor ukupnog prirasta može prikazati kao zbroj diferencijala elastične i plastične komponente, odnosno:

$$\{du^e\} = \{du_{el}^e\} + \{du_{pl}^e\}. \quad (7)$$

U skladu s Prandtlovim kriterijem tečenja, prirast vektora plastične deformacije leži na normali plohe tečenja, što se, naprimjer za čvor A, može napisati kao

$$\{du_{pl}^e\}_A = \lambda_A \{G\}_A, \quad (8)$$

gdje  $\lambda_A$  ima značenje magnitude plastične deformacije u čvoru A, a  $\{G\}_A$  je vektor gradijenta funkcije tečenja koji sadrži derivacije funkcije tečenja po svim komponentama opterećenja u čvoru A.

Tako se za prostorni gredni konačni element može pisati:

$$\{G\}_A^T = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial F_{xA}}, \frac{\partial \Phi}{\partial F_{yA}}, \frac{\partial \Phi}{\partial F_{zA}}, \frac{\partial \Phi}{\partial M_{xA}}, \frac{\partial \Phi}{\partial M_{yA}}, \frac{\partial \Phi}{\partial M_{zA}} \right\}. \quad (9)$$

Uzme li se, radi jednostavnosti, da u čvoru djeluju samo dvije komponente opterećenja, na primjer aksijalna sila  $P$  i moment savijanja  $M$ , tada problem postaje dvodimenzijski, a ploha tečenja se pretvara u ravninsku krivulju, kao što je prikazano na slici 2.

continuous stress resultant yield surface  $\Phi$  exists, which satisfies the equation

The equation of the yield surface, which is the function of the cross sectional shape, incorporates the ratios of all the components of the applied load and the critical values they would have if they acted on the beam element alone, e.g.  $p = P/P_{pl}$  for the axial force. This means that at a certain point on the yield surface only one set of intensities of components of the applied load, which led the cross section to full plastification, can exist.

When  $\Phi < 1$  the material is elastic,  $\Phi = 1$  means full plastification and  $\Phi > 1$  must be dismissed because the material is assumed to be perfectly plastic.

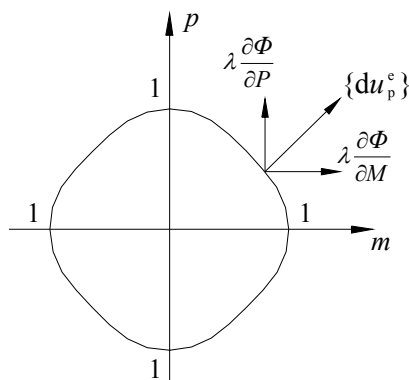
### 3.1. Plastic reduction matrix

If assumed to be infinitely small, the nodal displacement vector increment can be represented as the sum of differentials of an elastic and a plastic contribution, which can be represented as:

In conjunction with the normality criterion, the incremental vector of plastic deformation is normal to the yield surface, which can be stated as

where  $\lambda_A$  stands for the magnitude of the plastic deformation in node A and  $\{G\}_A$  is the gradient vector to the yield surface which contains derivatives of the yield surface in all components of the applied load in node A. Thus, for a spatial beam element it can be stated that

If it is assumed, for simplicity purposes, that the applied load has only two components, for instance an axial force  $P$  and a bending moment  $M$ , then the problem becomes two-dimensional, and the yield surface becomes a planar curve, as shown in Figure 2.



Slika 2. Dvodimenzijski primjer vektora plastične deformacije  
 Figure 2. A two-dimensional example of the plastic deformation vector

Veličina  $\lambda$  ovdje nema stvarnoga fizikalnog značenja s obzirom na to da se pretpostavlja nulta duljina plastične zone, ali ima matematičku važnost jer njezin predznak ilustrira mogućnost ili nemogućnost pojave plastičnog tečenja u promatranom čvoru. Javi li se plastični zglob u oba čvora, izraz (8) moguće je napisati u obliku:

In this analysis  $\lambda$  has no real physical meaning since a zero length of plastic zones is assumed, but it does have mathematical significance because its sign illustrates whether the calculated plastic flow can take place or not in a specific node. If plastification takes place in both nodes, equation (8) can be accordingly modified, which gives

$$\{du_{pl}^e\} = \begin{Bmatrix} \{du_{pl}^e\}_A \\ \{du_{pl}^e\}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{G\}_A & 0 \\ 0 & \{G\}_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \end{Bmatrix} = [G]\{\lambda\}, \quad (10)$$

gdje je  $[G]$  matrica gradijenata, a  $\{\lambda\}$  se naziva vektorom plastičnih multiplikatora ili pozitivnih skalara. Da bi u plastičnom zglobu uvijek vrijedilo  $\Phi = 1$ , svaki se inkrement čvornih sila mora odvijati tangencijalno na funkciju tečenja, a to zapravo znači da takav proces može uzrokovati promjenu isključivo elastične komponente inkrementa čvornih pomaka, s obzirom na to da plastična komponenta mora uvijek biti okomita na funkciju tečenja kao što je ranije usvojeno izrazima (8) i (9). Iz toga slijedi da i elastična komponenta inkrementa vektora sila mora biti tangencijalna na funkciju tečenja. Vrijedi, dakle,

where  $[G]$  represents the gradient matrix and  $\{\lambda\}$  is the vector of proportionality factors or plastic multipliers. For  $\Phi = 1$  to be always valid in a plastic hinge, every incremental nodal force vector must be tangent to the yield surface, which implies that one such change can cause the incremental nodal displacement vector to change only in its elastic component, since the plastic component must always be normal to the yield surface, as it was previously stated with equations (8) and (9). From this it follows that the elastic component of the incremental force vector must also be tangent to the yield surface. Thus, it follows

$$\{df^e\} = [k^e]\{du_{el}^e\}. \quad (11)$$

Kako su vektori prirasta čvornih sila i prirasta plastične deformacije međusobno okomiti, njihov skalarni produkt mora biti jednak nuli, odnosno

Since the incremental force vector and the incremental plastic displacement vector are normal to each other, their dot product must be zero, that is

$$\{du_{pl}^e\}^T \{df^e\} = \{\lambda\}^T [G]^T \{df^e\} = [G]^T \{df^e\} = 0. \quad (12)$$

Uvrsti li se izraz (10) u (7), a zatim tako dobiveni izraz u (11), dobiva se:

$$\{df^e\} = [k^e]\{du^e\} - [k^e][G]\{\lambda\}, \quad (13)$$

a uvrštavanjem (13) u (12) slijedi

$$[G]^T \left( [k^e]\{du^e\} - [k^e][G]\{\lambda\} \right) = 0, \quad (14)$$

iz čega se za  $\{\lambda\}$  dobiva

$$\{\lambda\} = \left( [G]^T [k^e] [G] \right)^{-1} [G]^T [k^e] \{du^e\}. \quad (15)$$

Uvrštavanjem (15) u (13), konačno se dobiva:

$$\{df^e\} = \left( [k^e] - [k_{pl}^e] \right) \{du^e\} \quad (16)$$

gdje je

$$[k_{pl}^e] = [k^e][G] \left( [G]^T [k^e] [G] \right)^{-1} [G]^T [k^e] \quad (17)$$

plastična redukcijaska matrica.

Ako u obzir treba uzeti i geometrijsku nelinearnost, jednadžbu (16) je, u skladu s izrazom (4), jednostavno modificirati pa vrijedi

$$\{df^e\} = \left( [k^e] + [k_G^e] - [k_{pl}^e] \right) \{du^e\}. \quad (18)$$

Izrazi (16) i (18) zapravo su osnovne jednadžbe konačnog elementa modificirane članom  $[k_{pl}^e]$ , koji u obzir uzima materijalnu nelinearnost. Vidljivo je da plastična redukcijaska matrica smanjuje krutost konačnog elementa.

### 3.2. Korekcija vektora čvornih sila

Kako inkrement čvornih sila u numeričkom algoritmu ne može biti infinitezimalan, vrijednosti vektora sila na kraju svakog takvog inkrementa ne zadovoljavaju kriterij tečenja  $\Phi = 1$ , već vrijedi  $\Phi > 1$ , što, u skladu s ranije iznesenim pretpostavkama, nije dopušteno. Potrebno je, stoga, izvesti korekciju vrijednosti vektora čvornih sila, takvu da uvjet  $\Phi = 1$  na kraju ipak bude zadovoljen. Drugim riječima, vrijednosti vektora čvornih sila potrebno je vratiti na funkciju tečenja. Jedan takav dvodimenzijski slučaj prikazan je na slici 3.

By inserting equation (10) into (7) and then accordingly into (11), it follows that

and inserting (13) into (12) now gives

which solving for  $\{\lambda\}$  results in

Using (15) in (13) finally gives

in which

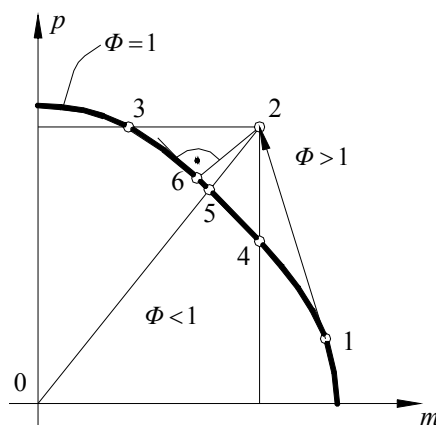
is the plastic reduction matrix.

Should the effects of geometric nonlinearity be considered, equation (16) can easily be modified by using equation (4) which gives

Equations (16) and (18) are in essence element stiffness equations modified with  $[k_{pl}^e]$ , which considers the effect of material nonlinearity. It is obvious that the plastic reduction matrix decreases the beam element stiffness.

### 3.2. Correction of the nodal force vector

Since any real increment in a numerical algorithm cannot be infinitely small, the values of the nodal force vector after one such increment do not satisfy the yield criterion  $\Phi = 1$ , but  $\Phi > 1$  applies instead, which, in accordance with the already stated assumptions, cannot be allowed. Thus, it is necessary to perform a correction of the force vector values, such that  $\Phi = 1$  applies again. In other words, the force vector values need to be returned to the yield surface. A two-dimensional problem for such a correction is presented in Figure 3.



Slika 3. Korekcija vektora čvornih sila  
Figure 3. Correction of the nodal force vector

Vektor inkrementa čvornih sila 1-2 leži na tangenti krivulje tečenja u točki 1. Dva su najjednostavnija načina korekcije da se konstantnim drži moment savijanja  $M$  ili aksijalna sila  $P$ , što znači da se kraj inkrementa seli u točku 4 ili 3. Sljedeća je mogućnost da se točku 2 pomakne po pravcu 2-0, što rezultira položajem 5, ili da se korekcija vrši po pravcu 2-6, koji je ujedno i normala na krivulju tečenja u točki 6. U praktičnoj se inženjerskoj primjeni najčešće koristi korekcija 2-5 zbog njezine jednostavnosti.

#### 4. PRIMJERI

Za rješavanje svih primjera korišten je računalni program MASTAN2 [7]. Kao rješenje za svaku je konstrukciju dan iznos graničnog opterećenja prema rješenju prvog i drugog reda, koje ne uzima odnosno uzima u obzir geometrijsku nelinearnost. Za sva su takva rješenja zatim uspoređene krivulje odziva konstrukcije na porast vanjskog opterećenja do kritične vrijednosti. Deformirana geometrija i redosljed pojavljivanja plastičnih zglobova nisu prikazani u obrađenim primjerima.

##### 4.1. Primjer 1

Potrebno je pronaći kritično opterećenje za ravninski okvir prikazan na slici 4 ako je  $L = 2$  m i ako je poprečni presjek posvuda pravokutnik dimenzija  $b \times h = 2 \times 4$  cm, a materijal ima sljedeće značajke:

$$E = 200 \text{ GPa}, \sigma_T = 240 \text{ MPa}, \nu = 0,3.$$

Incremental force vector 1-2 is tangent to the yield function at point 1. The two most simple ways of correction are by keeping either the bending moment  $M$  or the axial force  $P$  constant, which gives points 4 or 3 as the end result. The next option is to relocate point 2 to position 5, which lies on the line 0-2, and finally using the line 2-6, which is normal to the yield function at point 6. The most commonly used in structural engineering is the 2-5 correction, mostly due to its simplicity.

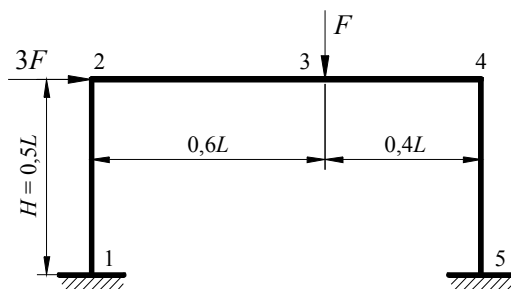
#### 4. EXAMPLES

All the examples were solved with the computer program MASTAN2 [7]. For each analyzed construction a first- and a second-order solution for the critical load are given, where the first considers and the second does not consider geometric nonlinearity. For every pair of those solutions load-displacement curves until the applied load reaches its critical value are compared. Deformed geometry and order in which the plastic hinges appear are not presented in any of the examples.

##### 4.1. Example 1

A critical load value needs to be obtained for a single-story planar frame shown in Figure 4 if  $L = 2$  m and if the cross section for all beams is a rectangle  $b \times h = 2 \times 4$  cm, while the material has the following properties:

$$E = 200 \text{ GPa}, \sigma_T = 240 \text{ MPa}, \nu = 0,3.$$



Slika 4. Jednoetažni ravninski okvir  
Figure 4. Single-story planar frame

Konstrukcija je diskretizirana čvorovima u presjecima 1, 2, 3, 4 i 5, a opterećenje zadano s  $F = 10$  kN.

Prema rješenju prvog reda kritična je vrijednost sile  $F$  dosegnuta pri omjeru opterećenja 0,25591 pa je

$$F_{pl,1} = 0,25591 \cdot 10000 = 2559,1 \text{ N} \cong 2560 \text{ N} . \quad (19)$$

Za rješenje drugog reda prediktor-korektor metodom dobiva se

$$F_{pl,2} = 0,2505 \cdot 10000 = 2505 \text{ N} . \quad (20)$$

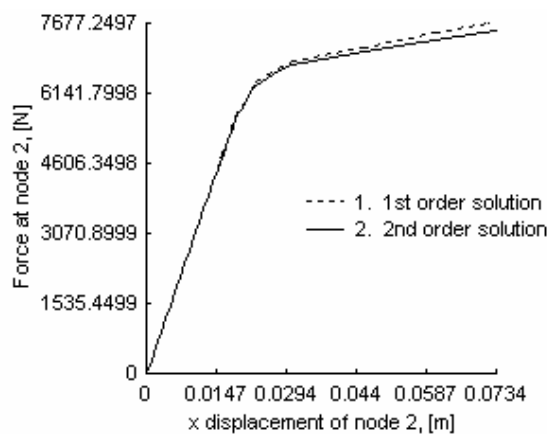
Usporedba je rješenja prema obje teorije dana na slici 5, gdje se prati ovisnost porasta horizontalne sile i horizontalnog pomaka čvora 2.

Discretization is achieved by locating the nodes in sections 1, 2, 3, 4 and 5 and the applied load is set to  $F = 10$  kN.

The 1st-order simple step solution reaches critical load at the applied load ratio 0,25591 which yields

The 2nd-order solution using the predictor-corrector method obtains

The load-displacement curves obtained by both theories are compared in Figure 5, where the horizontal force is related to the horizontal displacement of node 2.



Slika 5. Usporedba rješenja u čvoru 2  
Figure 5. Comparison of solutions at node 2

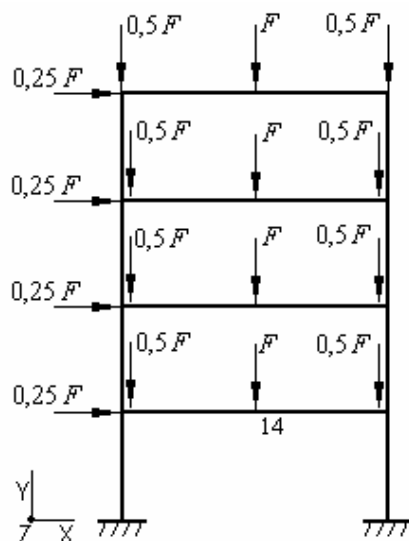
#### 4.2. Primjer 2

Ravninski četveroetažni okvir na slici 6 ima širinu 914,4 cm i svaka etaža visoka je 365,8 cm.

#### 4.2. Example 2

Four-story planar frame shown in Figure 6 is 914,4 cm wide and each story is 365,8 cm high.





Slika 6. Četveroetažni ravninski okvir  
Figure 6. Four-story planar frame

Stupovi prve etaže imaju I-profil W12×79 (AISC standard), a ostale tri etaže W10×60. Sve horizontalne grede imaju profil W16×40. Profili stupova postavljeni su tako da njihov struk leži u ravnini samog okvira. Materijal konstrukcije ima sljedeća svojstva:

$$E = 200 \text{ GPa}, \sigma_T = 240 \text{ MPa}, \nu = 0,3.$$

Diskretizacija konstrukcije izvedena je postavljanjem čvora na mjesto djelovanja svake sile, a opterećenje je zadano s  $F = 200 \text{ kN}$ .

Prema rješenju prvog reda kritična vrijednost sile  $F$  doseguta je pri omjeru opterećenja 0,804441 pa je

$$F_{pl,1} = 0,804441 \cdot 200 \cong 160,89 \text{ kN} . \quad (21)$$

Za rješenje drugog reda prediktor-korektor metodom dobiva se

$$F_{pl,2} = 0,72024 \cdot 200 \cong 144,05 \text{ kN} . \quad (22)$$

Usporedba rješenja dana je na slici 7, gdje se prati međusobni porast vertikalnog pomaka čvora 14, označenog na slici 6, i sile u tom istom čvoru.

Columns of the first story have the W12×79 cross section (AISC standard), and the remaining columns have W10×60. All girders have W16×40. The columns are oriented so that the webs coincide with the frame's plane. Material properties are:

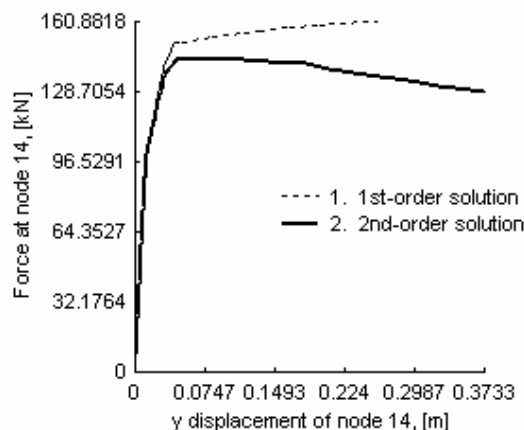
$$E = 200 \text{ GPa}, \sigma_T = 240 \text{ MPa}, \nu = 0,3.$$

Discretization of the structure is done by placing a node at every point where a force is applied and the applied load is set to  $F = 200 \text{ kN}$ .

The 1st-order simple step solution reaches critical load at applied load ratio 0,804441 which results in

The 2nd-order solution using the predictor-corrector method gives

The load-displacement curves are compared in Figure 7 relating the vertical displacement of node 14, marked in Figure 6, and the force in that same node.



Slika 7. Usporedba rješenja u čvoru 14  
Figure 7. Comparison of solutions at node 14

### 4.3. Primjer 3

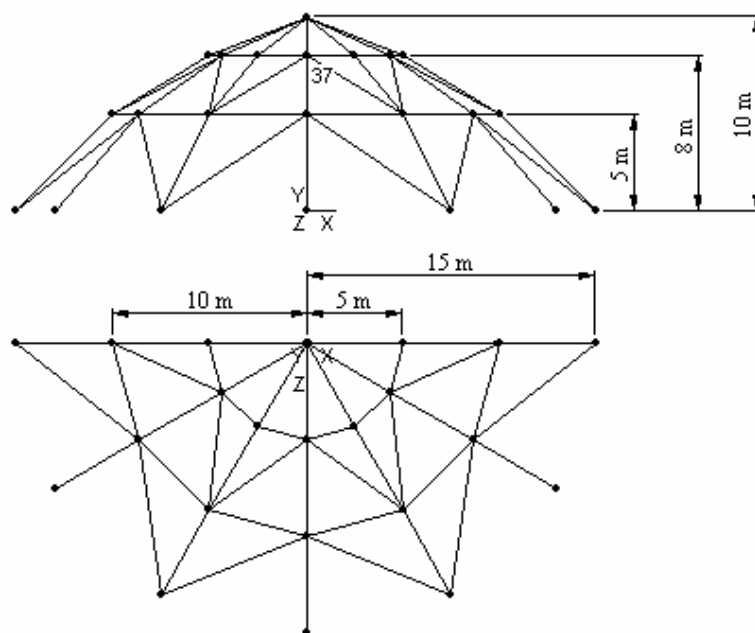
Dvanaesterokutni kupolni nosač prikazan na slici 8 u svakom je svojem čvoru opterećen vertikalnom silom  $F$  prema dolje. Sve grede imaju kružni poprečni presjek promjera 12 cm. Materijal ima sljedeća svojstva:

$$E = 200 \text{ GPa}, \sigma_T = 240 \text{ MPa}, \nu = 0,3.$$

### 4.3. Example 3

A twelve-sided dome shown in Figure 8 is at each node subjected to a concentrated vertical force  $F$  oriented downward. All members have a circular cross section 12 cm in diameter. Material properties are:

$$E = 200 \text{ GPa}, \sigma_T = 240 \text{ MPa}, \nu = 0,3.$$



Slika 8. Kupolni okvirni nosač  
Figure 8. Twelve-sided dome

Na slici 8 zbog simetričnosti je nacrtana samo polovica tlocrta.

Due to symmetry, only one half of the top view is shown in Figure 8.

Svaka greda je opisana jednim konačnim elementom, a opterećenje je postavljeno na  $F = 1000$  kN.

Prema rješenju prvog reda kritična je vrijednost sile  $F$  dosegnuta pri omjeru opterećenja 0,93169 pa je

$$F_{pl,1} = 0,93169 \cdot 1000 = 931,69 \text{ kN} . \quad (23)$$

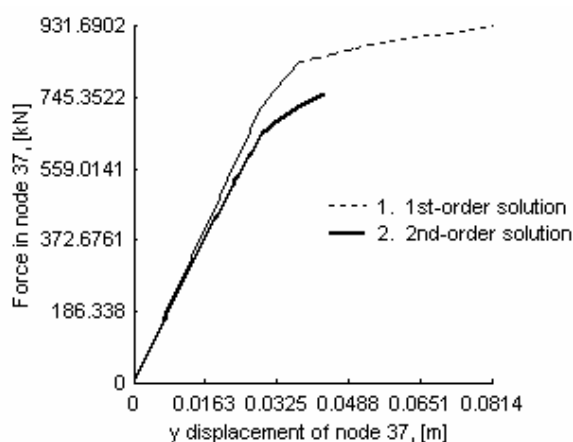
Za rješenje drugog reda prediktor-korektor metodom dobiva se

$$F_{pl,2} = 0,75549 \cdot 1000 = 755,49 \text{ kN} . \quad (24)$$

Every member is described with one beam finite element and the applied load is set to  $F = 1000$  kN.

The 1st-order simple step solution reaches critical load at applied load ratio 0,93169 which results in

The 2nd-order solution using the predictor-corrector method gives



Slika 9. Usporedba rješenja u čvoru 37

Figure 9. Comparison of solutions at node 37

Kod ispitivanja granične nosivosti grednih konstrukcija, gdje su tankostijene strukture vrlo česte, dodatnu pozornost treba posvetiti i mogućoj pojavi gubitka elastične stabilnosti [5], kada konstrukcija gubi nosivost daleko prije pojave plastičnih deformacija. Krivulja za rješenje drugog reda tada bi bila običan pravac koji bi se prekinuo duboko u elastičnoj zoni.

## 5. ZAKLJUČAK

Pregledom iznesenih informacija lako je zaključiti kako pretpostavke i pojednostavnjenja iznesena u uvodu i trećem poglavlju znatno pojednostavnjuju matematička razmatranja potrebna za kvalitativno opisivanje plastičnih pojava na konstrukcijama, a samim time i u velikoj mjeri olakšavaju njihovu implementaciju u numerički algoritam. Na upravo takvu numeričkom modelu počiva i program MASTAN2, korišten za analizu prikazanih primjera, koji, iako ograničenog doseg, u svojoj domeni primjene postiže zadovoljavajuće rezultate.

Usporedbe krivulja odziva za rješenja prvog i drugog reda

In the analysis of framed structures critical load, where thin-walled members are very common, additional attention needs to be paid to the possibility of loss of elastic stability [5], which occurs far before the plastic deformation would have taken place. The curve for the 2nd-order solution would then be a straight line which would break deep in the elastic zone.

## 5. CONCLUSION

An overview of the information presented in this article leads to conclusion that the assumptions and simplifications introduced considerably simplify mathematical derivations required for qualitative description of plasticity effects in structures, and, thus, simplifying their implementation into a numerical algorithm to a great extent.

Such a model is in the core of the MASTAN2 program, used for the analysis of the presented examples, and, although limited in scope, provides satisfactory results in its domain of application.

The comparisons of load-displacement curves for the first-

upozoravaju na nužan oprez pri dimenzioniranju konstrukcija, s obzirom na to da rješenja prvog reda mogu biti vrlo varljiva i time potencijalno opasna. Vrlo je važno, stoga, uočiti činjenicu da je geometrijska nelinearnost uvijek prisutna i samo u nekim specifičnim slučajevima može biti zanemarena.

Kako je rješenje drugog reda uvijek manje od rješenja prvog reda, a uz dodatnu opasnost od mogućeg previda gubitka elastične stabilnosti, uvijek je preporučljivo vršiti nelinearnu analizu drugog reda.

## 6. POPIS OZNAKA

širina	$b$	– m
promjer	$d$	– m
modul elastičnosti	$E$	– Pa
sila (općenito)	$F$	– N
kritična sila	$F_{pl}$	– N
vektor čvornih sila	$\{f^e\}$	
matrica gradijenta	$[G]$	
visina	$h$	– m
elastična matrica krutosti	$[k^e]$	
geometrijska matrica krutosti	$[k_G^e]$	
plastična redukcijaska matrica	$[k_{pl}^e]$	
tangentna matrica krutosti	$[k_T^e]$	
dužina	$L$	– m
moment (općenito)	$M$	– Nm
aksijalna sila	$P$	– N
kritična aksijalna sila	$P_{pl}$	– N
vektor čvornih pomaka	$\{u^e\}$	
elastična komponenta vektora čvornih pomaka	$\{u_{el}^e\}$	
plastična komponenta vektora čvornih pomaka	$\{u_{pl}^e\}$	
pomaci po osima $x, y, z$	$u, v, w$	– m
osi koordinatnog sustava	$x, y, z$	
Poissonov koeficijent	$\nu$	
naprezanje na granici tečenja	$\sigma_T$	– Pa
funkcija tečenja	$\Phi$	
rotacijski pomak	$\varphi$	– rad
magnituda plastične deformacije	$\lambda$	
vektor plastičnih multiplikatora	$\{\lambda\}$	

and second-order solutions suggest caution in structural design, since the first-order solutions can be very deceiving and by that potentially dangerous. Thus, it is of the utmost importance to understand that the geometric nonlinearity is always present and can only be neglected in some particular cases.

Since the 2nd-order solution is always lesser than the 1st-order solution, and with the additional danger of possible oversight of loss of elastic stability, the use of the 2nd-order nonlinear analysis is advised.

## 6. LIST OF SYMBOLS

width
diameter
modulus of elasticity
force (generally)
critical force
nodal force vector
gradient matrix
height
elastic stiffness matrix
geometric stiffness matrix
plastic reduction matrix
tangent stiffness matrix
length
moment (generally)
axial force
critical axial force
nodal displacement vector
elastic component of nodal displacement vector
plastic component of nodal displacement vector
displacements along axes $x, y, z$
coordinate system axes
Poisson's coefficient
yield stress
yield surface function
rotational displacement
magnitude of plastic deformation
vector of plastic multipliers

**LITERATURA  
REFERENCES**

- [1] Brnić, J.: *Elastomehanika i plastomehanika*, Školska knjiga, Zagreb, 1996.
- [2] Brnić, J., Turkalj, G.: *Nauka o čvrstoći II*, Zigo, Rijeka, 2006.
- [3] Chen, W. F., Sohal, I.: *Plastic Design and Second-Order Analysis of Steel Frames*, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [4] McGuire, W., Gallagher, R. H., Ziemian, R. D.: *Matrix Structural Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [5] Turkalj, G., Brnić, J.: *Nonlinear stability analysis of thin-walled frames using UL-ESA formulation*, International Journal of Structural Stability and Dynamics, 4 (2004) 1, 45-67.
- [6] Turkalj, G., Brnić, J., Prpić-Oršić, J.: *ESA formulation for large displacement analysis of framed structures with elastic-plasticity*, Computers & Structures, 82 (2004), 2001-2013.
- [7] Ziemian, R. D., McGuire W.: *MASTAN2: Version 2.0*, John Wiley & Sons, New York, 2002.

Strukovni članak

Professional paper

Adresa autora / Authors' address:

Branimir Rončević, dipl. ing.

Izv. prof. dr. sc. Goran Turkalj, dipl. ing.

Sveučilište u Rijeci, Tehnički fakultet

Vukovarska 58

HR-51000 Rijeka, Hrvatska