

UDK 531.43:539.62:681.532.8

# MODELIRANJE MIKRODINAMIČKOG PONAŠANJA SUSTAVA ZA PRECIZNO POZICIONIRANJE S IMPULSNIM UPRAVLJANJEM MICRODYNAMICS MODELING FOR PRECISION POSITIONING SYSTEMS WITH IMPULSIVE CONTROL

Branimir RONČEVIĆ

**Sažetak:** U ovom su radu, uz uvod u problematiku preciznog pozicioniranja, izložene osnovne teorijske postavke Hsieh-Panova modela statičkog trenja. Na primjerima je prikazana sposobnost simuliranja svih relevantnih pojava opaženih u eksperimentima te ovisnost ponašanja modela o promjenama vrijednosti njegovih parametara, pri čemu se kroz kratak osvrt na problematiku kvantitativne procjene parametara modela uvodi razmatranje važnosti njihova pojedinačnog poznavanja kod pozicioniranja s impulsnim upravljanjem.

**Ključne riječi:**

- statičko trenje
- mikrodinamičke nelinearnosti
- pre-sliding pomaci
- precizno pozicioniranje

**Summary:** In this article, along with an introduction into precision positioning, basic concepts of the Hsieh-Pan static friction model are presented. Through the use of examples, the ability of the model to simulate all relevant phenomena observed in experiments is shown and variations in model behaviour due to parameter changes are investigated, where the issue of quantitative estimation of the model parameters is briefly commented upon, through which a consideration of the importance of their individual estimation is introduced with regard to impulsive control in positioning.

**Keywords:**

- static friction
- microdynamic nonlinearities
- pre-sliding displacements
- precision positioning

## 1. UVOD

Precizno pozicioniranje s mikrometarskim i submikrometarskim točnostima kroz intenzivni je razvoj tehnologije postalo iznimno važna disciplina s brojnim primjenama u području metrologije, proizvodnje, manipuliranja i montaže itd. Takve je točnosti moguće postići samo ukoliko se u razmatranje uzimaju i pomaci u tzv. pre-sliding fazi pomaka, u kojoj su razni istraživači zabilježili pomake reda veličine i do  $10^2 \mu\text{m}$  za linearne te  $10^2$  lučnih sekundi za rotacijske pomake [1-4].

Ovisnost sile i pomaka u pre-sliding domeni pokazuje se kao vrlo složena mikrodinamička pojava. U brojnim eksperimentima opisanim u literaturi opažane su nelinearne elastične deformacije popraćene histerezom i nelokalnim memorijskim svojstvima te tzv. wipe-out efektom, kao i plastične deformacije popraćene puzanjem i izotropnim očvršćivanjem [1-4]. Kvantitativno, statičko trenje funkcija je vremena i položaja, ali ipak i privremeno (kratkoročno) neovisno o vremenu te lokalno neovisno o položaju pa se stoga u raznim eksperimentima

## 1. INTRODUCTION

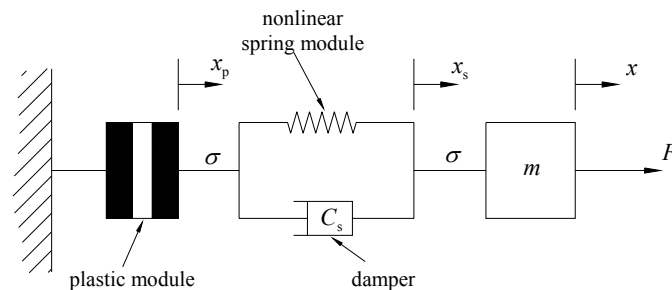
High precision positioning with micrometric and submicrometric accuracies has become a stringent issue with numerous applications, in particular in measurement and manufacturing industry, assembly processes etc. Such accuracies cannot be achieved without thorough consideration of the so-called pre-sliding phase of motion, where displacements well into the micrometric domain, up to the order of  $10^2 \mu\text{m}$  for linear and  $10^2$  arc-seconds for rotational motion, have been observed [1-4].

The force-displacement dependence in the pre-sliding domain is characterized by a quite complex micro-dynamical behaviour. Nonlinear elastic deformation accompanied by hysteresis and non-local memory and the wipe-out effect have been observed on one hand, and plastic deformation accompanied by creep and isotropic hardening on the other [1-4]. Quantitatively, static friction is time and position varying, but it is also temporarily time-invariant and locally position-invariant. For that reason, repeatable qualitative results can be

moгу dobiti kvalitativno ponovljivi rezultati [1]. Razni modeli dinamičkog trenja, u kojima je pre-sliding faza predstavljena kao specijalni slučaj klizanja pri brzinama bliskima nuli, u većini slučajeva uspješno simuliraju većinu navedenih pojava [5-9]. Fenomenološki model statičkog trenja, koji su predložili Hsieh i Pan [1], opisan u poglavlju 2, uspješno simulira svu složenost ovisnosti sila-pomak u pre-sliding domeni, kao što je i pokazano u [1]. U 3. poglavlju dani su primjeri simulacija, koji su zatim popraćeni sažetim osvrtom na važnost procjene parametara modela kroz njihov pojedinačni utjecaj na krajnji dobiveni pomak.

## 2. OPIS MODELA

Jednadžbe modela izvode se za prikladno osmišljenu analogiju mehaničkog sustava prikazanog na slici 1.

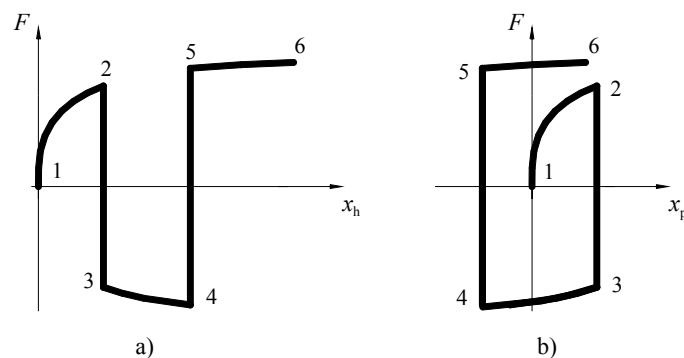


Slika 1. Mehanička analogija modela statičkog trenja  
Figure 1. A mechanical analogy of the static friction model

Prema zamisli iz [1], svaki modul modela posjeduje sposobnost simuliranja određenih mehaničkih svojstava, a potom njihovi zbrojeni odzivi aproksimiraju ukupnost opaženih pojava vezanih uz pre-sliding pomake.

### 2.1. Plastični modul

Plastični modul mora prije svega posjedovati sposobnost modeliranja puzanja i izotropnog očvršćivanja. Stoga njegovo mehaničko ponašanje mora kvalitativno odgovarati zakonitosti prikazanoj na slici 2.



Slika 2. Prikaz željenog ponašanja plastičnog modula  
Figure 2. Desired behaviour of the plastic module

obtained in experiments [1].

Various dynamic friction models, where the pre-sliding phase is implied as a special case of sliding with near-zero velocities, in general successfully simulate most of the mentioned phenomena [5-9]. A phenomenological static friction model proposed by Hsieh and Pan [1], described in section 2, successfully simulates the force-displacement dependence in its entire complexity, as corroborated in [1]. In section 3, examples of simulations are presented and followed by a brief discussion on the importance of parameter estimation and their individual influence on the output displacement of the model.

## 2. MODEL DESCRIPTION

Equations of the model are derived for a suitably proposed mechanical system shown in Figure 1.

As formulated in [1], each module of the proposed model exhibits a particular mechanical property and it is the combined response of these modules that matches the complete pre-sliding behaviour.

### 2.1. Plastic module

The plastic module has to have the ability to model primarily creep and isotropic hardening. That implies that mechanical behaviour of the module needs to qualitatively match the one shown in Figure 2.

Da bi prikazano ponašanje bilo moguće simulirati, diferencijalnu jednadžbu plastičnog modula uzima se u sljedećem obliku:

$$\dot{x}_h = \begin{cases} \alpha(f(\sigma) - x_h), & \forall f(\sigma) > x_h \\ 0, & \forall f(\sigma) \leq x_h \end{cases}, \quad (1)$$

$$\dot{x}_p = \text{sgn}(\sigma)\dot{x}_h$$

pritom je  $\alpha$  nenegativan skalar,  $f(|\sigma|)$  je derivabilna monotono rastuća funkcija pomak-sila,  $x_h$  je prethodno akumulirani plastični pomak, a  $x_p$  je rezultirajući pomak plastičnog modula.

Akumulirani plastični pomak  $x_h$  pomoćna je veličina i može biti shvaćena kao "memorija" u kojoj se pohranjuju svi plastični pomaci nametnuti promatranom sustavu, što izravno omogućava jednostavno modeliranje izotropnog očvršćivanja. Stoga vrijedi:

$$x_h = \int |dx_p| \Rightarrow x_h = \sum_i |x_{pi}|. \quad (2)$$

Uzimajući funkciju  $f(|\sigma|)$  u obliku

$$f(|\sigma|) = \frac{|\sigma|^n}{\lambda}, \quad (3)$$

gdje su veličine  $n > 1$  i  $\lambda > 0$  skalari, te uz početni uvjet  $x_h(0) = x_{h0}$ , rješenja jednadžbe (1) glase:

$$x_h = f(|\sigma|) - (f(|\sigma|) - x_{h0})e^{-\alpha t}, \quad (4)$$

$$x_p = x_{p0} + \text{sgn}(\sigma)(x_h - x_{h0}). \quad (5)$$

Iz (4) vidljivo je da  $x_h$  za neku konstantnu vrijednost sile trenja  $\sigma$  asimptotski u vremenu konvergira ka vrijednosti  $f(|\sigma|) = |\sigma|^n/\lambda$ . Time se jasno pokazuje da plastični modul ima sposobnost modeliranja pojave puzanja, gdje je  $f(|\sigma|)$  krajnje moguće stanje očvršćenosti modula, tj. plastični pomak koji se može postići pri nekoj vrijednosti sile trenja  $\sigma$ . Iz jednadžbe (5) izravno slijedi kako apsolutna promjena plastičnog pomaka  $x_p$  ovisi isključivo o promjeni  $x_h$ , što implicira da će i u ponašanju samoga plastičnog pomaka biti sadržano svojstvo puzanja.

## 2.2. Nelinearni elastični modul

S obzirom da eksperimenti pokazuju da su svi ogranci krivulja histereze geometrijski slični [1], posve općenit opis elastičnoga ponašanja modela moguće je formulirati promatrajući ogranke lokalno, tj. u odnosu na aktivnu točku obrata. Nagib tangente na krivulju sila-pomak u svakoj se točki može izraziti kao funkcija njezine

In order to simulate such behaviour, the governing equations of the module must be defined in the following way:

where  $\alpha$  is a non-negative scalar,  $f(|\sigma|)$  is a derivable monotonically increasing displacement-force function,  $x_h$  is denoted as the accumulated work hardening and  $x_p$  is the displacement of the plastic module.

The accumulated work hardening  $x_h$  is an auxiliary quantity which in essence "memorizes" all the plastic displacements previously introduced into the system, which thus enables the model to easily assess the hardened state of the system. Therefore:

Adopting  $f(|\sigma|)$  in the form

where  $n > 1$  and  $\lambda > 0$  are scalars, and with the initial condition  $x_h(0) = x_{h0}$ , solutions of equation (1) are:

From (4) it is obvious that for a given constant value of the input force  $\sigma$   $x_h$  in time asymptotically approaches value  $f(|\sigma|) = |\sigma|^n/\lambda$ . This clearly demonstrates that the plastic module has the ability to model creep, where  $f(|\sigma|)$  represents maximum possible work hardening, i.e. a plastic displacement that corresponds to a particular value of friction force  $\sigma$ . From (5) it follows that the absolute change of  $x_p$  depends only on the change of  $x_h$ , which directly implies that the plastic displacement exhibits creep in the same manner.

## 2.2. Nonlinear spring module

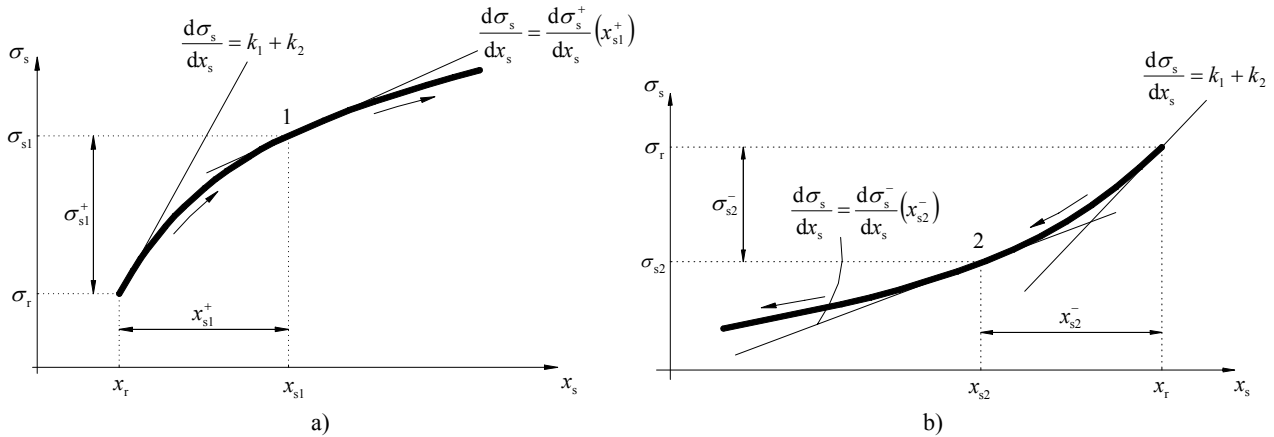
Since many experiments show that branches of hysteresis curves are geometrically similar [1], a completely general description of the elastic module behaviour can be formulated if each branch is observed locally, with respect to the active reverse point. The slope of the tangent to the force-displacement curve at each point can

udaljenosti od pripadajuće točke obrata smjera pa se diferencijalna jednadžba modula može zapisati kao

$$\frac{d\sigma_s}{dx_s} = k_1 + k_2 e^{-\beta|x_s - x_r|}, \quad (6)$$

gdje su  $k_1$ ,  $k_2$  i  $\beta$  pozitivni skalari,  $x_r$  je pomak u aktivnoj točki obrata,  $s$  pripadnom silom  $\sigma_r$ , a  $\sigma_s$  i  $x_s$  su sila i elastični pomak, koji se razmatraju u odnosu na točku  $(x_r, \sigma_r)$ , kao što je prikazano na slici 3.

where  $k_1$ ,  $k_2$  and  $\beta$  are positive scalars,  $x_r$  and  $\sigma_r$  are the displacement and force in the active reverse point, and  $\sigma_s$  and  $x_s$  are the force and spring displacement, which are observed relative to point  $(x_r, \sigma_r)$ , as shown in Figure 3.



Slika 3. Nelinearni elastični modul; a) pozitivan smjer pomaka, b) negativan smjer pomaka  
Figure 3. Nonlinear spring module; a) positive direction of displacement, b) negative direction of displacement

Iz jednadžbe (6) vidljivo je da krutost nelinearne opruge u polaznoj točki iznosi  $k_1 + k_2$ , kao što je prikazano i na slici 3, te da s porastom pomaka prema beskonačnosti eksponencijalno teži vrijednosti  $k_1$ .

Funkcija  $\sigma_s(x_s)$ , koja je rješenje diferencijalne jednadžbe (6), mora se tražiti odvojenim razmatranjem slučajeva pozitivnog i negativnog smjera pomaka. Za slučaj pozitivnoga smjera pomaka vrijedi  $x_s \geq x_r$  pa su relativni pomak i sila modula definirani kao  $x_s^+ = x_s - x_r \geq 0$  te  $\sigma_s^+ = \sigma_s - \sigma_r \geq 0$ . Rješenje jednadžbe (6) tada glasi

$$\sigma_s^+ = k_1 x_s^+ + \frac{k_2}{\beta} \left( 1 - e^{-\beta x_s^+} \right). \quad (7)$$

Za negativan smjer pomaka vrijedi  $x_s < x_r$  pa su relativni pomak i sila modula definirani kao  $x_s^- = x_s - x_r < 0$  te  $\sigma_s^- = \sigma_s - \sigma_r < 0$ . Tada se kao rješenje dobiva:

$$\sigma_s^- = k_1 x_s^- + \frac{k_2}{\beta} \left( e^{\beta x_s^-} - 1 \right). \quad (8)$$

Smjer pozitivnog ili negativnog pomaka u (7) i (8) ima matematički smisao te ovisi o izboru koordinatnoga sustava. Pritom se vrijednost prirasta apsolutnoga pomaka neće uvijek poklapati i s predznakom njegova matematičkog prirasta.

From equation (6) it clearly follows that the stiffness of the nonlinear spring equals  $k_1 + k_2$  at each reverse point, as shown in Figure 3, and then exponentially decreases to  $k_1$  as the displacement approaches infinity.

In order to obtain the function  $\sigma_s(x_s)$ , the differential equation in (6) has to be solved by separately considering the positive and negative direction of motion. For a positive direction of motion  $x_s \geq x_r$  applies, so the relative displacement and force are defined as  $x_s^+ = x_s - x_r \geq 0$  and  $\sigma_s^+ = \sigma_s - \sigma_r \geq 0$ . Equation (6) is then solved with

For the case of negative direction  $x_s < x_r$  applies, so the relative displacement and force are  $x_s^- = x_s - x_r < 0$  and  $\sigma_s^- = \sigma_s - \sigma_r < 0$ . The solution is obtained as:

The positive or negative direction of motion in (7) and (8) have a purely mathematical meaning which depends on the choice of coordinate system. Therefore, a change in the absolute displacement value will not always coincide with the sign of its mathematical change.

### 2.3. Dinamička jednačba sustava

Uz neku vanjsku silu  $F$  koja djeluje na sustav pod utjecajem trenja, iz drugog Newtonova zakona slijedi:

$$m\ddot{x} = F - \sigma, \tag{9}$$

gdje je  $x = x_s + x_p$ , a za ukupnu silu trenja  $\sigma$  vrijedi:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_r + C_s \dot{x}_s + k_1(x_s - x_r) + \frac{k_2}{\beta} [1 - e^{-\beta(x_s - x_r)}] & \forall x_s \geq x_r \\ \sigma_r + C_s \dot{x}_s + k_1(x_s - x_r) + \frac{k_2}{\beta} [e^{\beta(x_s - x_r)} - 1] & \forall x_s < x_r \end{cases}, \tag{10}$$

odnosno ukupni iznos sile trenja jednak je zbroju sile u ishodištu ogranka, sile zbog prigušenja i sile zbog krutosti nelinearne opruge.

S obzirom da veličine  $x_s$ ,  $x_h$  i  $x_p$  u potpunosti opisuju stanje sustava, vektor stanja može se formulirati kao

$$Z = [x_s \quad \dot{x}_s \quad x_h \quad \dot{x}_h \quad x_p \quad \dot{x}_p]^T. \tag{11}$$

Deriviranjem izraza (1) i (10) po vremenu i upotrebom izraza (9), u ovisnosti o stanju očvršnuća plastičnog modula, odnosu  $x_s$  i  $x_r$  te predznaku sile, moguće je izvesti osam različitih sustava od šest diferencijalnih jednačbi prvog reda. Te je jednačbe moguće napisati u sažetom obliku [10].

Za  $|\sigma^n|/\lambda > x_h$ , tj. za fazu puzanja, vrijedi:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_s \\ \dot{x}_s \\ x_h \\ \dot{x}_h \\ x_p \\ \dot{x}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \left(1 + \frac{an}{\lambda} \sigma^{n-1} C_s\right)^{-1} \left(\frac{F - \sigma}{m} - q\right) \\ \frac{\alpha |\sigma|^n}{\lambda} - \alpha x_h \\ \operatorname{sgn}(\sigma) \left(1 + \frac{an}{\lambda} |\sigma|^{n-1} C_s\right)^{-1} \left(\frac{an}{\lambda} |\sigma|^{n-1} C_s \frac{F - \sigma}{m} + q\right) \\ \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\frac{\alpha |\sigma|^n}{\lambda} - \alpha x_h\right) \\ \left(1 + \frac{an}{\lambda} |\sigma|^{n-1} C_s\right)^{-1} \left(\frac{an}{\lambda} |\sigma|^{n-1} C_s \frac{F - \sigma}{m} + q\right) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

gdje vrijedi

where

$$\sigma = \sigma_r + C_s \dot{x}_s + k_1(x_s - x_r) + \operatorname{sgn}(x_s - x_r) \frac{k_2}{\beta} [1 - e^{-\beta|x_s - x_r|}], \tag{13}$$

$$q = \frac{an}{\lambda} |\sigma|^{n-1} (k_1 + k_2 e^{-\beta|x_s - x_r|}) \dot{x}_s - \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha \dot{x}_h. \tag{14}$$

Za  $|\sigma^n|/\lambda \leq x_h$ , tj. za fazu očvršnutosti, vrijede izrazi

For  $|\sigma^n|/\lambda \leq x_h$ , i.e. the hardened phase, terms (13) and

### 2.3. Dynamic equation of the system

With an external force  $F$  acting on the system, the second Newton's law takes the form:

where  $x = x_s + x_p$ , and the friction force  $\sigma$  is:

which means that the friction force is the sum of the force at the active reverse point, the force due to damping and the force induced in the nonlinear spring.

Since the set of values  $x_s$ ,  $x_h$  and  $x_p$  uniquely describes the state of the system, the state vector can be formulated as

By differentiating (1) and (10) in time and by applying (9), depending on the hardening state of the plastic module, the relation between  $x_s$  and  $x_r$  and the sign of the force, eight different systems of six first-order differential equations can be derived. These equations can be written in concise form [10].

For  $|\sigma^n|/\lambda > x_h$ , i.e. the creep phase:

(13) i (14), a izraz (12) svodi se na

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_s \\ \dot{x}_s \\ x_h \\ \dot{x}_h \\ x_p \\ \dot{x}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ F - \sigma \\ m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Integriranjem jednadžbi (12) ili (15) kao rješenje dobiva se vektor stanja iz izraza (11).

Implementacijom izraza (12)-(15) i primjenom pravila za aktiviranje točki obrata opisanog u [1], moguće je provesti simulacije te izraditi kontroler.

### 3. SIMULACIJA, ANALIZA PARAMETARA

Da bi se ponašanje nekog realnog sustava moglo vjerno reproducirati simulacijom, potrebno je poznavati koje ga vrijednosti parametara  $n$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\beta$  i  $C_s$  opisuju.

Slijedeći postupak procjene parametara predložen u [1], dobivaju se njihove aproksimativne vrijednosti. Potvrđuje se međutim da je metodom pokušaja i pogrešaka potrebno podesiti njihove vrijednosti da bi se postiglo prihvatljivo slaganje s eksperimentalnim rezultatima. Na slici 4 prikazana je usporedba simulacije statičkog odziva s podešenim parametrima i eksperimenta izvedenog u [4].

(14) apply, and (12) reduces to

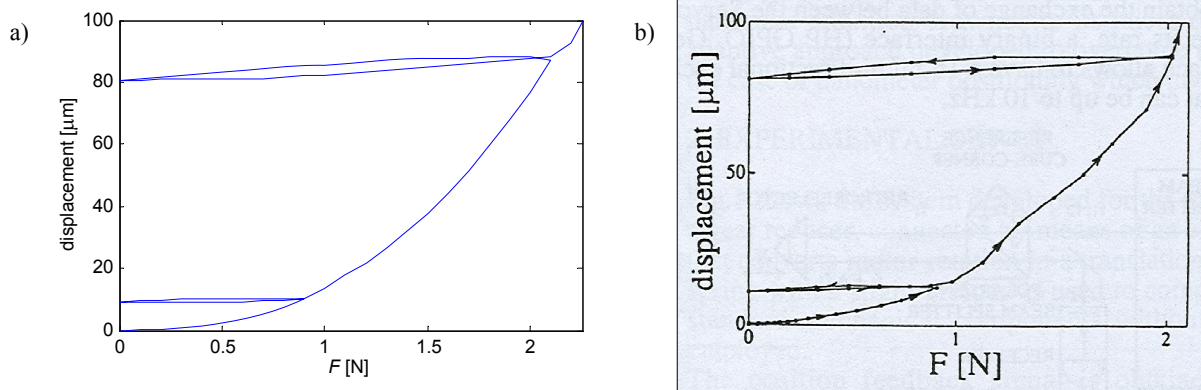
By integrating equations in (12) or (15), the state vector in term (11) is obtained as the solution.

By implementing terms (12)-(15) and combining them with the reverse point rules described in [1], simulations can be carried out and a controller can be designed.

### 3. SIMULATION, PARAMETER ANALYSIS

In order to replicate an experimentally obtained response of a real system, a set of parameters  $n$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $\beta$  and  $C_s$ , that describe the system, must be known.

Following the procedure proposed in [1], approximate parameter values are obtained. However, a method of trial and error is indeed required to tune them so as to achieve an acceptable level of agreement with the experimental data. Figure 4 shows a comparison of a static response simulated with tuned parameters and an experiment reported in [4].



Slika 4. Usporedba: a) simulacija, b) stvarni odziv iz [4]

Figure 4. A comparison: a) simulation, b) measured response in [4]

Parametri za simulaciju modela sa slike 4 uzeti su kako slijedi:  $k_1 = 0,2 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $k_2 = 3,2 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $C_s = 0,9 \text{ kg/s}$ ,  $\beta = 5$ ,  $n = 2,6$ ,  $\lambda = 0,09$ ,  $\alpha = 1$ . Vidljivo je da takav odabir parametara doista dobro aproksimira eksperimentalne rezultate.

U slučaju kada je potrebno isključivo postizanje određene pozicije, impulsna tipologija upravljanja, kao npr. Pulse Width Modulation (PWM), je vrlo učinkovita [4]. S tim u vidu, razumno je očekivati da neće biti potrebno s velikom točnošću poznavati sve parametre modela,

The model parameter values for simulation in Figure 4 are taken as:  $k_1 = 0,2 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $k_2 = 3,2 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $C_s = 0,9 \text{ kg/s}$ ,  $\beta = 5$ ,  $n = 2,6$ ,  $\lambda = 0,09$ ,  $\alpha = 1$ . It is obvious that such choice of parameters approximates the experiment quite well.

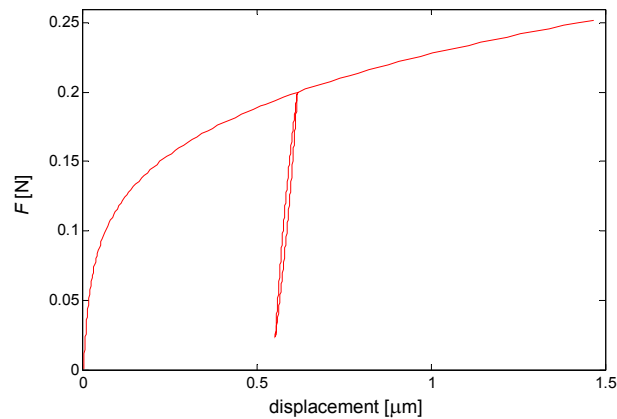
In the case when simple positioning is sought, impulsive control typologies, such as Pulse Width Modulation (PWM), are very effective [4]. With that in view, it is reasonable to expect that not all model parameters will have to be estimated very accurately, since presumably a

odnosno da će određeni skup parametara u određivanju krajnjega stanja sustava imati znatno izraženiju ulogu od ostalih.

Da bi se ispitali navedeni utjecaji, kao referentan je uzet model eksperimenta koji su proveli Courtney-Pratt i Eisner [2], a čije su parametre Hsieh i Pan odredili u [1]:  $k_1 = 1 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $k_2 = 3 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $\beta = 18$ ,  $n = 4$ ,  $\lambda = 0,003$ . Za preostale je vrijednosti pritom uzeto  $C_s = 1 \text{ kg/s}$  i  $\alpha = 0,8$ , a masa je poznata iz [2] kao  $m = 0,92 \text{ kg}$ . Na slici 5 prikazan je statički odziv toga modela i u usporedbi s rezultatima iz [2], simulira ih s velikom točnošću.

certain number of parameters will play a significantly more dominant role in determining the end-state of the system than the others.

To investigate these influences, a model of an experiment carried out by Courtney-Pratt and Eisner [2] is taken as a reference, for which Hsieh and Pan determined the parameters [1]:  $k_1 = 1 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $k_2 = 3 \text{ N}/\mu\text{m}$ ,  $\beta = 18$ ,  $n = 4$ ,  $\lambda = 0,003$ . The remaining values are taken as  $C_s = 1 \text{ kg/s}$  and  $\alpha = 0,8$ , while from [2] the mass is  $m = 0,92 \text{ kg}$ . The static response of this model is shown in Figure 5, and it simulates results reported in [2] with excellent accuracy.

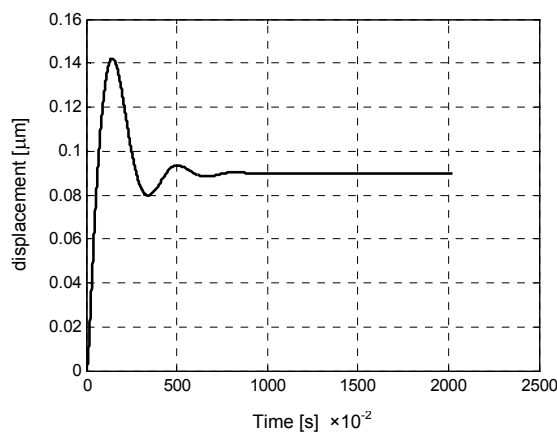


Slika 5. Statički odziv referentnog modela

Figure 5. Static response of the reference model

Postupak ispitivanja utjecaja pojedinih parametara sastoji se u jednostavnom variranju njihovih iznosa jednog po jednog, držeći pritom sve ostale na referentnim vrijednostima, i potom uspoređivanju odziva s odzivom referentnog sustava. Sve kombinacije podvrgnute su istoj vanjskoj uzbuđi, odnosno impulsu sile intenziteta 1 N u trajanju od 200 ms uz dodatnih 20 s bez ikakva opterećenja kako bi se postiglo ustaljivanje odziva. Na slici 6 prikazan je rezultirajući pomak modela s referentnim vrijednostima parametara.

The procedure of influence assessment for all the parameters consists of simply varying their values one by one, while keeping all the others at their reference values, and then comparing the obtained responses to the response of the reference system. All combinations are submitted to the same force input, which is a 1 N force impulse for a duration of 200 ms with an additional 20 s without force acting on the system to allow for the settling of the response. Fig. 6 shows the output displacement for referential parameter values.



Slika 6. Odziv referentnog modela

Figure 6. Response of the reference model

Krajnji dostignuti pomak sustava vrlo je blizu 90 nm te je

The final position attained by the system is extremely

stoga to vrijednost s kojom treba uspoređivati ostale slučajeve.

U tablici 1 dane su vrijednosti trajno postignute pozicije za određenu promijenjenu vrijednost parametra.

close to 90 nm and therefore that is the value to which other cases must be compared.

In Table 1, values of the attained positions for each of the changed parameter values are presented.

Tablica 1. Rezultati variranja parametara (referentni rezultat  $x = 90$  nm)

Table 1. Results of parameter varying (reference output  $x = 90$  nm)

$k_1$	0,01	0,1	0,5	1	2	10	100
$x$ [nm]	69	71	80	90	101	119	122
$k_2$	0,03	0,3	1	3	9	30	300
$x$ [nm]	61	63	70	90	114	121	122
$\beta$	0,18	1,8	6	18	54	180	1800
$x$ [nm]	104	103	100	90	71	60	60
$\alpha$	0,02	0,08	0,4	0,8	1,6	8	80
$x$ [nm]	4	31	73	90	104	124	132
$\lambda$	0,00003	0,0003	0,001	0,003	0,009	0,03	0,1
$x$ [nm]	358	197	136	90	52	21	1
$n$	1,05	1,1	2	4	5	6	6,2
$x$ [nm]	4430	3787	589	90	36	8	4
$C_s$	0,01	0,1	0,5	1	2	10	100
$x$ [nm]	~ 90	~ 90	88	90	95	126	5313

Parametri su uglavnom mijenjani u rasponu od 100 puta manje do 100 puta veće vrijednosti od svoje referentne vrijednosti, osim kada to nije bilo u suprotnosti s matematičkim ustrojem samog modela te ako prije toga nisu dobiveni fizikalno nemogući rezultati (npr. suprotan smjer sile i pomaka kojeg ona uzrokuje).

Iz tablice 1 vidljivo je da parametri elastičnog modula  $k_1$ ,  $k_2$  i  $\beta$  imaju očekivano manji utjecaj na promjenu rezultata, s obzirom da čak i ekstremno velika pogreška procjene od 100 puta u najgorem slučaju rezultira pogreškom željenog pomaka od  $\pm 30\%$ .

S druge strane, parametri plastičnog modula  $n$ ,  $\lambda$  i  $\alpha$  u slučaju impulsne uzbude imaju mnogostruko veći utjecaj na ponašanje modela. Stoga je vrlo važno i njihovo točno poznavanje, a samim time trebala bi biti posvećena dodatna pozornost i njihovom eksperimentalnom utvrđivanju opisanom u [1].

Za prve dvije vrijednosti faktora prigušenja  $C_s$  nakon 20 s nije postignuto potpuno smirivanje odziva, međutim srednja vrijednost vrlo je blizu referentnoj. U velikom rasponu vrijednosti faktor prigušenja nema znatnijeg utjecaja na krajnje stanje, međutim pri prevelikom porastu njegove vrijednosti dobivaju se usporedivo velike pogreške pozicije. Ipak, prevelike vrijednosti tog parametra nelogična su pretpostavka, s obzirom na to da bi takvo prigušenje metalnih mikroneravnina u međusobnom kontaktu vjerojatno zahtijevalo značajke materijala još neotkrivene u bilo kojem poznatom eksperimentu.

Za buduća razmatranja potrebno je ipak detaljnije ispitati utjecaje parametara u većem broju varijacija sa svrhom točnijeg kvantificiranja raspona moguće pogreške, kao i

Parameters have predominantly been varied within the range of values 100 times smaller and 100 times larger than their reference values, unless such an approach was in collision with the basic structure of the model or unless physically impossible outputs were calculated (such as different sign of force and its resulting displacement).

Table 1 shows that the parameters of the nonlinear spring module, as could be expected, have a comparatively small influence, since even an extremely large estimation error by a factor of 100 can in the worst case cause a positioning error of  $\pm 30\%$ .

On the other hand, the parameters of the plastic module  $n$ ,  $\lambda$  and  $\alpha$  have a far greater influence on the model behaviour, when an impulsive force input is applied. For that reason their accurate estimation is paramount, and the estimation procedure in [1] should be carefully carried out as well as their subsequent tuning.

For the first two values of the damping coefficient  $C_s$ , a complete settling of the response was not reached after 20 s, but the mean value was very close to the reference. In a pretty wide range, the influence of the damping coefficient is almost non-existent, but for too great an increase in its value a comparably big error will be introduced. However, too great a value of this parameter would be quite unreasonable to expect, given the fact that a very high resulting damping coefficient of the metal micro-asperities in contact would presumably require material properties so far unseen in any known experiment.

Future research should, nevertheless, be carried out with a more detailed set of variations for each parameter so as to quantify the possible error span as accurately as



eventualnu usporedbu s utjecajem parametara modela na njegovo elastično ponašanje u situacijama gdje bi se želio ostvarivati što veći povratljivi pomak nakon prestanka djelovanja sile.

#### 4. ZAKLJUČAK

Uz sažet opis modela statičkog trenja koji su predložili Hsieh i Pan, prikazana je i njegova sposobnost vjernoga reproduciranja eksperimentalnih rezultata vezanih za mikrodinamičke nelinearnosti u pre-sliding fazi pomaka. Ispitivanjem pojedinačnog utjecaja parametara modela utvrđeni su okvirni rasponi mogućih pogrešaka koje bi bile uvedene u sustav eventualnom pogrešnom procjenom njihovih vrijednosti.

#### 5. POPIS OZNAKA

masa	$m$ ,	kg
krutost elastičnog modula	$k_1$ ,	N/m
krutost elastičnog modula	$k_2$ ,	N/m
parametar plastičnog modula	$n$ ,	
vrijeme	$t$ ,	s
ukupni pomak modela	$x$ ,	m
akumulirani plastični pomak	$x_h$ ,	m
pomak plastičnog modula	$x_p$ ,	m
pomak u aktivnoj ishodišnoj točki	$x_r$ ,	m
pomak elastičnog modula	$x_s$ ,	m
elastični pomak u negativnom smjeru	$x_s^-$ ,	m
elastični pomak u pozitivnom smjeru	$x_s^+$ ,	m
koeficijent prigušenja	$C_s$ ,	kg/s
vanjska sila	$F$ ,	N
vektor stanja	$Z$ ,	
parametar plastičnog modula	$\alpha$ ,	
parametar elastičnog modula	$\beta$ ,	
parametar plastičnog modula	$\lambda$ ,	
sila trenja	$\sigma$ ,	N
sila u aktivnoj ishodišnoj točki	$\sigma_r$ ,	N
relativna sila elastičnog modula	$\sigma_s$ ,	N
relativna sila el. modula u neg. smjeru	$\sigma_s^-$ ,	N
relativna sila el. modula u poz. smjeru	$\sigma_s^+$ ,	N

#### LITERATURA REFERENCES

- [1] Hsieh, C., Pan, Y.-C.: *Dynamic behaviour and modelling of the pre-sliding static friction*, Wear No. 242 (2000), p. 1-17
- [2] Courtney-Pratt, J. S., Eisner, E.: *The effect of a tangential force on the contact of metallic bodies*, Proc. Royal Society A238 (1957), p. 529-550
- [3] Futami, S., Furutani, A., Yoshida, S.: *Nanometer positioning and its microdynamics*, Nanotechnology No. 1 (1990), p. 31-37
- [4] Zelenika, S., De Bona, F.: *Microdynamic Behaviour of a Nanometer Positioning System*, "AMST – CISM Courses and Lectures No. 406", (1999), p. 771-779
- [5] Canudas de Wit, C., Olsson, H., Östrom, K. J., Lischinsky, P.: *A New Model for Control of Systems with Friction*, IEEE Trans. on Automatic Control Vol. 40 (1995) No. 3, p. 419-425
- [6] Dupont, P., Armstrong, B., Hayward, V.: *Elasto-Plastic Friction model: Compliance and Stiction*, Proc. of ACC, Vol. 2, Chicago, USA, 2000, pp. 1072-1077
- [7] Lampaert, V., Al-Bender, F., Swevers, J.: *A Generalized Maxwell-Slip Friction Model appropriate for Control Purposes*, Proc. of Physics and Control Conference, Vol. 4, St. Peterburg, Russia, 2003, pp. 1170-1177

possible, as well as a comparative influence analysis of the parameters on the model's elastic behaviour, in applications where as large as possible reversible displacements would be desirable.

#### 4. CONCLUSION

After a concise description of the static friction model proposed by Hsieh and Pan, the model's ability to reproduce experimental results obtained for microdynamic nonlinearities in the pre-sliding phase is demonstrated. Through influence analysis of the model parameters, some preliminary approximations of error spans induced by possible occurrence of parameter miscalculation have lastly been presented.

#### 5. LIST OF SYMBOLS

mass	$m$
spring module stiffness	$k_1$
spring module stiffness	$k_2$
plastic module parameter	$n$
time	$t$
output displacement of the model	$x$
state of accumulated work hardening	$x_h$
plastic module displacement	$x_p$
active reverse point displacement	$x_r$
spring module displacement	$x_s$
spring displacement in the negative direction	$x_s^-$
spring displacement in the positive direction	$x_s^+$
damping coefficient	$C_s$
input force	$F$
state vector	$Z$
plastic module parameter	$\alpha$
spring module parameter	$\beta$
plastic module parameter	$\lambda$
friction force	$\sigma$
active reverse point friction force	$\sigma_r$
relative force in the spring module	$\sigma_s$
relative force in the spring module for negative direction	$\sigma_s^-$
relative force in the spring module for positive direction	$\sigma_s^+$

- [8] Lampaert, V., Swevers, J., Al-Bender, F.: *Modification of the Leuven integrated friction model structure*, IEEE Trans. on Automatic Control Vol. 47 (2002) No. 4, p. 683-687
- [9] Swevers, J., Al-Bender, F., Ganseman, C. G., Prajogo, T.: *An Integrated Friction Model Structure with Improved Presliding Behavior for Accurate Friction Compensation*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.45 (2000), p. 675-686
- [10] Chen, C. L., Jang, M. J., Lin, K. C.: *Modeling and high-precision control of a ball-screw driven stage*, Precision Engineering, Vol. 28 (2004), p. 483-495

Primljeno / Received: 30.4.2008

Prihvaćeno / Accepted: 26.6.2008

Strukovni prilog

Technical note

Adresa autora / Authors' address

Branimir Rončević

Tehnički fakultet Sveučilišta u Rijeci

Vukovarska 58

51000 Rijeka

HRVATSKA

broncev@riteh.hr